NOMBRES REELS ET FONCTIONS

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif : addition, multiplication, commutatif, associatif, élément neutre, inverse, distributivité.

- Propriété d'Archimède :
  Soit a un réel positif ou nul, il existe un entier m tel que m>a.
  Soit b un réel négatif ou nul, il existe un entier n tel que n<a.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. L'entier k s'appelle la partie entière de x et se note E(x).

- A est majorée si $\forall x \in A$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $x \leq M$. On dit que M est un majorant de A et si $M \in A$, alors M est le maximum de A.

- A est minorée si $\forall x \in A$, $\exists m \in \mathbb{R}$, $m \leq x$. On dit que m est un minorant de A et si $m \in A$, alors m est le minimum de A.

f : U→V est une correspondance qui a tout élément de U (domaine de définition) associe un seul élément de V (domaine valeur).

- f est paire ⇔ f est centrée en 0 et f(-x) = f(x)
- f est impaire ⇔ f est centrée en 0 et f(-x) = - f(x)
- f est T-périodique ⇔ il existe T>0 tel que f(x+T) = f(x)

- f est croissante ⇔ x < y ⇒ f(x) ≤ f(y)
- f est décroissante ⇔ x < y ⇒ f(x) ≥ f(y)

Une fonction qui reste (strictement) croissante ou décroissante sur un intervalle est dite (strictement) monotone. Une fonction est constante lorsqu'elle est à la fois croissante et décroissante sur un intervalle.

f ↗ et g ↗ ⇒ f + g ↗
f ≥ 0 et g ≥ 0, (f ↗ et g ↗) ou (f ↘ et g ↘) ⇒ f.g ↗
(f ↗ et g ↗) ou (f ↘ et g ↘) ⇒ g∘f ↗
f ↗ et g ↘ ⇒ g∘f ↘

f et g sont majorées (minorées) ⇒ f + g est majorée (minorée)
f ≥ 0 et g ≥ 0, f et g sont majorées ⇒ f.g est majorée
f est bornée (majorée et minorée) ⇔ |f| est majorée

g est majoré ⇒ g∘f est majoré

- Fonctions usuelles : polynôme, trigonométriques, logarithme népérien, exponentielle, puissance rationnelle et négative, partie entière, valeur absolue.

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad |xy| = |x||y| \qquad |x+y| \leq |x| + |y|$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \qquad |x-a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$$

LIMITE

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall e > 0,\ \exists a > 0$ tel que
  $$x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < e$$

- $\lim\limits_{x\to +\text{ou}-\infty} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall e > 0,\ \exists r\ > \text{ou} <\ 0$ tel que
  $$x\ > \text{ou} < r \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < e$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\text{ou}-\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A\ > \text{ou} <\ 0,\ \exists a > 0$ tel que
  $$x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < a \quad \Rightarrow \quad f(x)\ > \text{ou} <\ A$$

- $\lim\limits_{x\to +\text{ou}-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0,\ \exists r\ > \text{ou} <\ 0$ tel que
  $$x\ > \text{ou} < r \quad \Rightarrow \quad f(x) > A$$

- $\lim\limits_{x\to +\text{ou}-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A < 0,\ \exists r\ > \text{ou} <\ 0$ tel que
  $$x\ > \text{ou} < r \quad \Rightarrow \quad f(x) < A$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)-\ell\right|=0$

- Si une limite existe en x_0 ou $\pm\infty$ alors elle est unique en x_0 ou $\pm\infty$.

- On suppose $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell'$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=\ell+\ell' \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\ell\ell'$$

$$\lim_{x\to x_0} l\,f(x)=l\,\ell' \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{\ell'} \text{ si } \ell'\neq 0$$

- On suppose $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\begin{cases}+\infty \text{ si } \ell>0\\ -\infty \text{ si } \ell<0\\ ? \text{ si } \ell=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0\pm \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty \text{ si } \ell=0 \text{ et } f(x)>0$$

- Soient f et g des fonctions telles que $f\leq g$
  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell' \;\Rightarrow\; \ell\leq\ell'$

- <u>Théorème des Gendarmes</u> : soient f, g, h des fonctions :
  - o $f\leq g\leq h$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$
  - o $f\leq g\leq h$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

- f est bornée et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\ell\ (\pm\infty) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=\ell\ (\pm\infty)$

- Soient $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ et $Q(x)=b_px^p+\ldots+b_0$ des polynômes

  a_n et b_p strictement positifs $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{A(x)}{B(x)}=\begin{cases}+\infty & \text{si } n>p\\ a_n/b_n & \text{si } n=p\\ 0 & \text{si } n<p\end{cases}$

- $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\text{logarithme}}{\text{polynôme}}=0$ croissances comparées $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\text{polynôme}}{\text{exponentielle}}=0$

- L'existence de la limite implique l'égalité à gauche et à droite

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=\ell$$

SUITES

- <u>Suites arithmétiques</u> $U_{n+1}=U_n+r$
  $U_n=U_p+(n-p)r \;\Rightarrow\; U_n=U_0+nr$

$$\sum_{i=0}^{n-1}U_i=nU_0+\frac{n(n-1)}{2}r=n\times\frac{U_0+U_{n-1}}{2}$$

- <u>Suites géométriques</u> $U_{n+1}=U_nq$
  $U_n=U_p+q^{n-p} \;\Rightarrow\; U_n=U_0+q^n$

  $q\leq -1 \;\Rightarrow\; (U_n)$ n'a pas de limite et diverge de U_0
  $0\leq |q|<1 \;\Rightarrow\; (U_n)$ converge vers U_0
  $q>1 \;\Rightarrow\; (U_n)$ tend vers $\pm\infty$

$$\sum_{i=0}^{n-1}U_i=U_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{U_0-U_n}{1-q}$$

- $U(n) \to \ell \iff \forall e > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |U(n) - \ell| < e$

- Une suite peut être :
  - o convergente : limite finie et unique
  - o divergente : pas de limite ou limite infinie

- $U(n) \to \ell \Rightarrow U(n)$ est bornée

- Suites extraites : soit (Un) une suite et g :N→N une fonction strictement croissante. Vn=Ug(n) est une sous suite ou suite extraite de (Un). Si (Un) converge vers ℓ alors (Vn) aussi.

- $Un \to x_0$ et f continue en $x_0 \Rightarrow f(Un) \to f(x_0)$

- $Un \to x_0$, $Vn \to x_0$, $f(Un) \to l$, $f(Vn) \to l'$ et $l \neq l' \Rightarrow$ f n'a pas de limite

- Propriété des segments emboîtés :
  Soient deux suites (a_n) croissante et (b_n) décroissante avec $a_n \leq b_n$ et lim $(b_n - a_n) = 0$, alors (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ et $a_n \leq \ell \leq b_n$. On dit d'(a_n) et de (b_n) qu'elles sont adjacentes.

- Soit f : I→R une fonction continue. Si (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente et si sa limite ℓ appartient à I, alors $\ell = f(\ell)$.

CONTINUITE

- f est continue en x_0

$\iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$

$\iff \forall e > 0,\ \exists a > 0,\ |x - x_0| < a \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < e$

- Toutes les fonctions usuelles citées au premier chapitre sont continues sauf la fonction partie entière (E).

- Les sommes, produits, quotients et composés de deux fonctions continues, sous condition d'être défini(e)s, sont continu(e)s.

- Soient f : I→$\mathbb{R}$ et g : J→$\mathbb{R}$ des fonctions telles que f(I)⊂J
  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et g continue en $\ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(\ell)$

- Les formes indeterminées se résolvent généralement par factorisation du terme dominant ou tendant vers zéro.

$\infty.0 \quad \infty-\infty \quad 0^0 \quad \infty/\infty \quad 0/0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty$

- Fonctions lipschitzienne $\iff \exists K > 0\ \forall x, y\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$
  Une fonction lipschitzienne est continue sur Df.

- f : [a,b]→R continue
  f(a).f(b) < 0 ⇒ il existe c∈[a,b] tel que f(c)=0

Corrolaire : tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

- Théorème des Valeurs Intermediaires :

  f : [a,b]→R continue et f(a) < f(b)
  Pour tout k∈[f(a),f(b)], il existe c∈[a,b] tel que f(c)=k

- f : I→R est continue, I est un intervalle
  ⇒ f(I) est un intervalle et f(I)=][inf(f),sup(f)][

- f non majoré ⇒ sup(f)=+∞ f non minoré ⇒ inf(f)=-∞

- f :[a,b]→R continue ⇒ f est borné (admet un max et min sur [a,b])

- f :[a,b]→R continue et ↗ ou ↘ ⇒ f([a,b]) = [f(a),f(b)] ou [f(b),f(a)]

- Si f est strictement monotone et continue, f[a,b] est une bijection.

- f :I→f(I) continue et bijective ⇒ f^{-1}:f(I)→I bijection réciproque

DERIVABILITE

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pour que f soit dérivable en x_0, il faut que les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 soient finis et égaux. La tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

- Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0. Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leurs domaines de définition sauf les fonctions partie entière et valeur absolue.

$(u+v)'=u'+v'$ $\quad(lu)'=lu'$ $\quad(uv)'=u'v+uv'$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ $\quad\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ $\quad\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(e^u)'=u'e^u$ $\quad(v\circ u)'=(v'\circ u)u'$ $\quad(u^n)'=u'nu^{n-1}$ avec $n\in\mathbb{Q}$

$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\quad(\cos u)'=-\dfrac{\sin u}{u'}$ $\quad(\sin u)'=\dfrac{\cos u}{u'}$

$$(\tan u)'=\frac{1}{u'\cos^2 u}=\frac{1+\tan^2 u}{u'}$$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$ $\quad(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$ $\quad(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1-\operatorname{th}^2 x$

- f est bijective et $f'\neq 0$ $\Leftrightarrow$ f^{-1} est dérivable et $\left(f^{-1}\right)'=\dfrac{1}{f'\circ g}$

- x_0 est un maximum ou minimum local de f s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 tel que $f(x)\geq f(x_0)$ ou $f(x)\leq f(x_0)$ pour tout $x\in J$.

- x_0 extremum local et f dérivable en x_0 $\Rightarrow$ x_0 point critique
  $\Leftrightarrow$ x_0 extremum local <u>intérieur</u> de f $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)=0$

- <u>Théorème de Rolle</u> : soit f continue sur [a ;b] et dérivable sur]a ;b[avec f(a) = f(b) = 0 alors il existe un réel c∈]a ;b[tel que f'(c) = 0.

- <u>Théorème des Accroissements Finis</u> : soit f continue sur [a ;b] et dérivable sur]a ;b[alors il existe un réel c∈]a ;b[tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ tangente parralèle à (AB)

- Soit f : I→R continue sur [a ;b] et dérivable sur]a ;b[alors :
  - o ∀x∈ I, $f'(x)\geq 0$ ⇒ f est croissante sur I
  - o ∀x∈ I, $f'(x)\leq 0$ ⇒ f est décroissante sur I

- <u>Inégalités des Accroissements Finis</u> :
  soit f continue sur [a ;b] et dérivable sur]a ;b[alors
  - o $m\leq f'(x)\leq K \Rightarrow m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$
  - o $|f'(x)|\leq K \Rightarrow |f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$

- <u>Règle de l'Hospital</u> :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

- <u>f est convexe</u> ⇔ son graphe se situe au dessus de ses tangentes

⇔ $\forall a,b\in I,\ \forall t\in[0;1],\ f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$

⇔ $\forall a,b\in I,\ \forall t\in[0;1],\ a<b,\ f(x)\leq f(a)+(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

⇔ $\forall a,b\in I,\ a<b,\ f'(a)\leq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f'(b)$ ⇔ $f''(x)\geq 0$

- <u>f est concave</u> lorsque - f est convexe.

- Soit x_0 un point critique de f alors on a :

  - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ est un minimum local
  - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ est un maximum local
  - $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ est un point d'inflexion

… Je n'ai pas encore tapé le chapitre sur les fonctions usuelles : ln, exp, trigo, trigo réciproques, trigo hyperboliques… débrouillez-vous !